

# Il Teorema di Pólya

Alberto Ceselli  
Dottorato in Informatica  
XVIII ciclo  
A.A. 2003–2004

Corso di Matematica Discreta

## Sommario

In questa relazione vengono raccolte alcune considerazioni sul teorema di Pólya, un risultato centrale nel campo dell'enumerazione di figure con simmetrie, quali i grafi non etichettati. Ne viene presentata prima un'introduzione informale (sezione 1), poi un approccio più completo (sezione 2) ed infine alcuni esempi di applicazione (sezione 3). In particolare, vengono discussi alcuni risultati ottenuti nel campo del conteggio di strutture chimiche e nell'ambito della teoria dei grafi. Per completezza, in appendice sono riportati alcuni richiami di algebra.

## 1 Introduzione

Si supponga di voler realizzare una collana utilizzando quattro perle bianche e due perle nere e di voler calcolare quanti diversi tipi di collane possono essere create utilizzando queste sei perle. Non si tratta semplicemente di scegliere come disporre le perle in ciascuna delle sei posizioni disponibili, dato che ruotando o capovolgendo la collana si ottengono sostanzialmente figure equivalenti. Ad esempio, le tre configurazioni rappresentate in figura 1 corrispondono alla stessa collana. Infatti, la configurazione (b) può essere ottenuta dalla (a) ruotando la collana di  $60^\circ$  in senso orario, mentre la configurazione (c) capovolgendo la collana rispetto all'asse indicato con la linea tratteggiata.

Questo esempio introduce un problema più generale: è dato un insieme di figure aventi un *colore* (le perle con il colore bianco e nero, nell'esempio della collana). È dato un insieme di *siti* (le posizioni delle perle), ed un gruppo  $G$  di permutazioni di questi siti. Una *colorazione* è ottenuta selezionando un colore per ogni sito. Due colorazioni si dicono *equivalenti* se ognuna delle due può essere ottenuta dall'altra attraverso una permutazione dei siti appartenente a  $G$ . Noti i colori delle figure, e descritto il gruppo  $G$ , il teorema di Pólya permette di calcolare il numero di colorazioni non equivalenti.

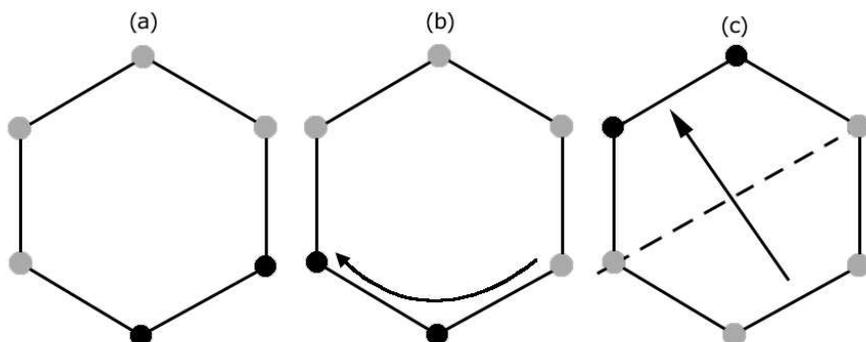


Figura 1: Esempio di una collana (a) e due figure equivalenti ottenute per rotazione (b) e per riflessione (c)

- Il colore di ciascuna figura viene descritto attraverso la *funzione generatrice dei colori*:

$$u(x) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

dove ogni  $x_i$  è un simbolo formale che rappresenta uno dei colori che possono essere assegnati ad ogni figura.

- Il gruppo  $G$  delle permutazioni dei siti che conducono a colorazioni equivalenti è descritto tramite l'*indice ciclo*, definito come segue. Ogni permutazione  $g \in G$  può essere scritta in *notazione ciclica* con  $\alpha_i$  cicli di lunghezza  $i$ .

**Definizione** Il *tipo* della permutazione  $g$  è la corrispondente partizione di  $n$

$$[1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, n^{\alpha_n}].$$

con  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$ , ed a  $g$  viene associata l'espressione

$$\zeta_g(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}$$

anche in questo caso, ogni  $y_i$  è un simbolo avente valore unicamente formale.

Ad esempio, la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

può essere espressa in notazione ciclica come  $(135)(246)$ . Il tipo della permutazione descritta è

$$\zeta_g(y) = y_3^2.$$

**Definizione** La somma formale delle espressioni  $\zeta_g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , presa su tutte le  $g \in G$  è un “polinomio” in  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Dividendo per  $|G|$ , si ottiene l’*indice ciclo* del gruppo di permutazioni  $G$ :

$$\zeta_G(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\sum_{g \in G} \zeta_g(y_1, y_2, \dots, y_n)}{|G|}$$

- La soluzione del problema viene fornita attraverso la *funzione generatrice delle colorazioni*:

$$U(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

dove il coefficiente di ogni termine  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots$  è il numero di colorazioni non equivalenti in cui il colore  $x_1$  è utilizzato  $k_1$  volte, il colore  $x_2$  è utilizzato  $k_2$  volte e così via.

*Il teorema di Pólya afferma che la funzione generatrice del numero di colorazioni non equivalenti  $U(x)$  si ottiene sostituendo la funzione generatrice dei colori  $u(x)$  nell’indice ciclo  $\zeta_G(y)$ .*

**Esempio** Tornando al caso della collana, ad ogni sito può essere assegnata una perla bianca (b) o nera (n). In questo caso, la funzione generatrice dei colori è

$$u(x) = x_b + x_n.$$

Inoltre, si supponga di rappresentare l’oggetto come un esagono regolare e di numerarne i vertici da 1 a 6 in senso orario. Si ottiene una colorazione equivalente ad ogni rotazione di  $60^\circ$  in senso orario della collana attorno al suo centro (figura 1b). La permutazione dei vertici corrispondente è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

In notazione ciclica questa permutazione può essere scritta come (123456). Applicando ripetutamente rotazioni di  $60^\circ$  si ottengono altre 4 configurazioni equivalenti. Nella seguente tabella sono rappresentate, per ogni angolo di rotazione (colonna 1), le permutazioni che conducono a configurazioni equivalenti (colonna 2) ed i loro tipi (colonna 3):

Operazione	Permutazione			Tipo
rotaz. $0^\circ$	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	(identità)		$y_1^6$
rotaz. $60^\circ$	(123456)			$y_6^1$
rotaz. $120^\circ$	(123456)	(123456) = (135)(246)		$y_3^2$
rotaz. $180^\circ$	(123456)	(135)(246) = (14)(25)(36)		$y_2^3$
rotaz. $240^\circ$	(123456)	(14)(25)(36) = (153)(264)		$y_3^2$
rotaz. $300^\circ$	(123456)	(153)(264) = (165432)		$y_6^1$

Il gruppo  $G$  delle permutazioni dei siti che conducono a configurazioni equivalenti è formato dalle 6 permutazioni descritte; l'indice ciclo corrispondente è, quindi,

$$\zeta_G(y_1, y_2, y_3, y_6) = \frac{1}{6}(y_1^6 + y_2^3 + 2y_3^2 + 2y_6^1)$$

Si ha quindi, una descrizione ( $u(x)$ ) del colore che può assumere ogni perla, ed una descrizione ( $\zeta_G(y)$ ) di quali sono le permutazioni che conducono a rappresentazioni diverse della stessa colorazione. Applicando il teorema di Pólya, si sostituisce  $u(x^i)$  ad ogni occorrenza di  $y_i$  nell'indice ciclo, e si ottiene la funzione generatrice del numero di colorazioni non equivalenti:

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{6}[(x_b + x_n)^6 + (x_b^2 + x_n^2)^3 + 2(x_b^3 + x_n^3)^2 + 2(x_b^6 + x_n^6)] = \\ &= x_b^6 + x_b^5 x_n + 3x_b^4 x_n^2 + 4x_b^3 x_n^3 + 3x_b^2 x_n^4 + x_b x_n^5 + x_n^6 \end{aligned}$$

Il coefficiente di ogni termine  $x_b^{k_b} x_n^{k_n}$  è il numero di colorazioni equivalenti in cui sono utilizzate  $k_b$  perle bianche e  $k_n$  perle nere. Essendo coinvolti solo due colori, è sufficiente considerare la funzione

$$u(x) = 1 + x.$$

infatti, determinato il numero di perle nere utilizzate in una colorazione è univocamente determinato anche il numero di perle bianche:

$$U(x) = 1 + x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + x^5 + x^6.$$

Il coefficiente di ogni termine  $x^i$  indica quante sono le colorazioni non equivalenti in cui vengono utilizzate  $i$  perle nere (e  $6 - i$  perle bianche).

Proseguendo questo esempio, è possibile ottenere colorazioni equivalenti anche capovolgendo la collana; si ottiene in tal modo una *riflessione* dei siti rispetto ad un asse di simmetria (figura 1c). La permutazione che descrive la riflessione rispetto all'asse passante per i vertici 1 e 4 è.

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right) = (1)(26)(35)(4)$$

Quindi, oltre alle sei permutazioni corrispondenti alle rotazioni, ci sono le sei permutazioni ottenute capovolgendo la collana dopo ogni rotazione. Nella seguente tabella vengono riportate le permutazioni dei siti che conducono a configurazioni equivalenti, ottenute applicando la riflessione dopo una rotazione. Il significato delle colonne è analogo alla tabella precedente:

Operazione	Permutazione	Tipo
rotaz. 0° e rifl.	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	$y_1^2 y_2^2$
rotaz. 60° e rifl.	(123456)	$y_2^3$
rotaz. 120° e rifl.	(135)(246)	$y_1^2 y_2^2$
rotaz. 180° e rifl.	(14)(25)(36)	$y_2^3$
rotaz. 240° e rifl.	(153)(264)	$y_1^2 y_2^2$
rotaz. 300° e rifl.	(165432)	$y_2^3$

Si nota come le riflessioni che seguono rotazioni di 0, 120 e 240 gradi siano equivalenti a riflessioni della collana rispetto agli assi passanti per i vertici 1 e 4, 3 e 6, 2 e 5 rispettivamente; invece, le riflessioni che seguono rotazioni di 60, 180 e 300 gradi sono equivalenti a riflessioni della collana rispetto agli assi perpendicolari ai lati tra i vertici 1 e 6, 2 e 3, 1 e 2 rispettivamente. L'indice ciclo corrispondente è, in questo caso,

$$\zeta_G(y_1, y_2, y_3, y_6) = \frac{1}{12}(y_1^6 + 4y_2^3 + 3y_1^2y_2^2 + 2y_3^2 + 2y_6^1) \quad (1)$$

Se si tiene conto anche delle simmetrie dovute alla riflessione, la funzione generatrice delle colorazioni ottenuta è

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{12}[(1+x)^6 + 4(1+x^2)^3 + 3(1+x)^2(1+x^2)^2 + 2(1+x^3)^2 + 2(1+x^6)] = \\ &= 1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + x^5 + x^6. \end{aligned}$$

Come prima, il coefficiente di ogni termine  $x^i$  indica quante sono le colorazioni non equivalenti in cui vengono utilizzate  $i$  perle nere.

## 2 Il teorema di Pólya

Di seguito, è riportata una trattazione più formale dei concetti introdotti per l'esempio della sezione precedente.

### 2.1 Simmetria ciclica e diedrale

Il tipo di simmetria che occorre più di frequente è quella associata ad oggetti circolari, come la collana nell'esempio della sezione precedente o dischi divisi in settori colorati. L'operazione più semplice che trasforma una figura di questo tipo in una figura equivalente è la rotazione. Se si restringe alle sole rotazioni le operazioni che portano una figura in una configurazione equivalente, si ottiene un gruppo ciclico di simmetrie. Si consideri un  $n$ -gono regolare, i cui vertici vengono etichettati in senso orario con i simboli  $1, 2, \dots, n$ . Una rotazione di  $\frac{360^\circ}{n}$  attorno al centro della figura corrisponde ad una permutazione

$$\pi = (123 \dots n)$$

dei vertici. Il gruppo delle rotazioni dell' $n$ -gono è il *gruppo ciclico* di ordine  $n$  generato da  $\pi$ , ovvero

$$C_n = \{id, \pi, \pi^2, \dots, \pi^{n-1}\}$$

Si denoti con  $\phi(d)$  la funzione di Eulero, che indica il numero di interi positivi  $\leq d$  che sono coprimi con  $d$ .

**Lemma 2.1** *Un gruppo ciclico di ordine  $n$  contiene esattamente  $\phi(d)$  elementi di ordine  $d$ , per ogni divisore  $d$  di  $n$ .*

**Teorema 2.2** Sia  $C_n$  il gruppo ciclico di permutazioni generato da  $\pi = (123 \dots n)$ . Allora, per ogni divisore  $d$  di  $n$ , ci sono  $\phi(d)$  permutazioni in  $C_n$  che hanno  $\frac{n}{d}$  cicli di lunghezza  $d$ , e quindi l'indice ciclo di  $C_n$  è

$$\zeta_{C_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) y_d^{\frac{n}{d}} \quad (2)$$

**Dim.**  $C_n$  contiene esattamente  $\phi(d)$  elementi di ordine  $d$ , per ogni divisore  $d$  di  $n$  (lemma 2.1). In questo caso, le  $\phi(d)$  permutazioni sono quelle della forma  $\pi^{\frac{kn}{d}}$ , dove  $1 \leq k \leq d$  e  $k$  è coprimo con  $d$ . Sia  $m$  la lunghezza del più corto ciclo della permutazione  $\pi^i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ); sia inoltre  $s$  in un ciclo di lunghezza  $m$ . Allora

$$\pi^{im}(s) = (\pi^i)^m(s) = s.$$

Per ogni  $t \in \{1, 2, \dots, n\}$   $s$  e  $t$  sono entrambi nel singolo ciclo di  $\pi = (123 \dots n)$ , quindi  $t = \pi^r(s)$  per qualche  $r$ . Ora

$$(\pi^i)^m(t) = \pi^{im} \pi^r(s) = \pi^r \pi^{im}(s) = \pi^r(s) = (t);$$

$t$  è in un ciclo di  $\pi^i$  la cui lunghezza divide  $m$ . Ma  $m$  è la lunghezza minima di un ciclo, quindi tale ciclo è lungo  $m$ . Quindi, tutti i cicli di  $\pi^i$  hanno la stessa lunghezza  $m$ . Se l'ordine di  $\pi^i$  è  $d$ , deve essere  $d = m$ ; quindi ci sono  $\frac{n}{d}$  cicli di lunghezza  $d$ .  $\square$

Un altro tipo di operazione che può portare a configurazioni simmetriche è la "riflessione" (figura 2): si supponga di porre  $n' = \frac{n}{2}$ , etichettare i lati del poligono con  $1 \dots n', n' + 1 \dots n$ , e riflettere la figura rispetto all'asse perpendicolare al lato tra i vertici 1 ed  $n$ . La permutazione dei vertici corrispondente è

$$\sigma = (1 \ n)(2 \ n-1) \dots (n' \ n'+1)$$

Dato  $\pi = (123 \dots n)$ , risulta

$$\sigma\pi = (1 \ n-1)(2 \ n-2) \dots (n'-1 \ n'+1)(n')(n)$$

che rappresenta, appunto, la riflessione sull'asse  $nn'$ . Come nell'esempio della collana, proposto nella sezione precedente, ci sono  $n' = \frac{n}{2}$  riflessioni rispetto agli assi che congiungono vertici opposti, e le permutazioni corrispondenti sono

$$\sigma\pi, \sigma\pi^3, \sigma\pi^5, \dots, \sigma\pi^{n-1}.$$

ed altre  $n' = \frac{n}{2}$  riflessioni rispetto agli assi perpendicolari ai lati del poligono, e le permutazioni corrispondenti sono

$$\sigma, \sigma\pi^2, \sigma\pi^4, \dots, \sigma\pi^{n-2}.$$

Considerando entrambi i tipi di simmetria, si ottiene un gruppo di  $2n$  permutazioni: le  $n$  rotazioni  $\pi^i$  e le  $n$  riflessioni  $\sigma\pi^i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ). Tale gruppo è detto *diedrale* di ordine  $2n$ , e si indica con  $D_n$ .

**Teorema 2.3** *L'indice ciclo di  $D_n$ , quando  $n$  è pari è*

$$\frac{1}{2}\zeta_{C_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) + \frac{1}{4}(y_2^{\frac{n}{2}} + y_1^2 y_2^{\frac{n}{2}-1})$$

**Dim.**  $D_n$  contiene gli  $n$  elementi di  $C_n$ , assieme a  $\frac{n}{2}$  permutazioni (come  $\sigma$ ) di tipo  $[2^{\frac{n}{2}}]$ , e  $\frac{n}{2}$  permutazioni (come  $\sigma\pi$ ) di tipo  $[1^2, 2^{\frac{n}{2}-1}]$ . Quindi

$$\zeta_{D_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{2n} \left( \sum_{d|n} \phi(d) y_d^{\frac{n}{d}} + \frac{n}{2} y_2^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} y_1^2 y_2^{\frac{n}{2}-1} \right)$$

□

Analoghe considerazioni valgono per il caso in cui il numero di vertici sia dispari, ad esempio  $n = 2n' + 1$ . Anche in questo caso il numero di riflessioni è  $n$ , ma ogni riflessione è rispetto all'asse che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto. La permutazione dei vertici corrispondente è

$$\bar{\sigma} = (1 \ n)(2 \ n-1) \dots (n' - 1 \ n'+1)(n')$$

**Teorema 2.4** *L'indice ciclo di  $D_n$ , quando  $n$  è dispari, è*

$$\frac{1}{2}\zeta_{C_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) + \frac{1}{2} y_1 y_2^{\frac{n-1}{2}}$$

**Dim.**  $D_n$  contiene gli  $n$  elementi di  $C_n$ , assieme a  $n$  permutazioni (come  $\bar{\sigma}$ ) di tipo  $[1, 2^{\frac{n-1}{2}}]$ , ed il risultato è analogo al caso precedente:

$$\zeta_{D_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{2n} \left( \sum_{d|n} \phi(d) y_d^{\frac{n}{d}} + n y_1 y_2^{\frac{n-1}{2}} \right)$$

□

Come visto nella sezione precedente, l'indice ciclo permette di memorizzare in una notazione compatta le informazioni sulle strutture di ciclo delle permutazioni di un gruppo.

## 2.2 Il numero di colorazioni non equivalenti

Sia  $G$  un gruppo di permutazioni degli elementi di un insieme  $X$ . Si supponga che ad ogni elemento  $x$  di  $X$  possa essere assegnato uno fra  $r$  diversi colori. Se  $K$  è l'insieme degli  $r$  colori, una *colorazione* è una funzione  $\omega$  da  $X$  a  $K$ . Se  $X$  ha cardinalità  $n$ , ci sono  $r^n$  colorazioni possibili; indichiamo con  $\Omega$  l'insieme di tali funzioni.

Ogni permutazione  $g \in G$  induce una permutazione  $\hat{g}$  degli elementi di  $\Omega$  nel modo seguente: data una colorazione  $\omega$ , si definisce  $\hat{g}(\omega)$  come la colorazione nella quale il colore assegnato ad  $x$  è il colore che  $\omega$  assegna a  $g(x)$ , ovvero

$$(\hat{g}(\omega))(x) = \omega(g(x))$$

La funzione che mappa  $g$  in  $\hat{g}$  è una *rappresentazione* di  $G$  come gruppo  $\hat{G}$  di permutazioni di  $\Omega$ . Inoltre, vale la seguente proposizione:

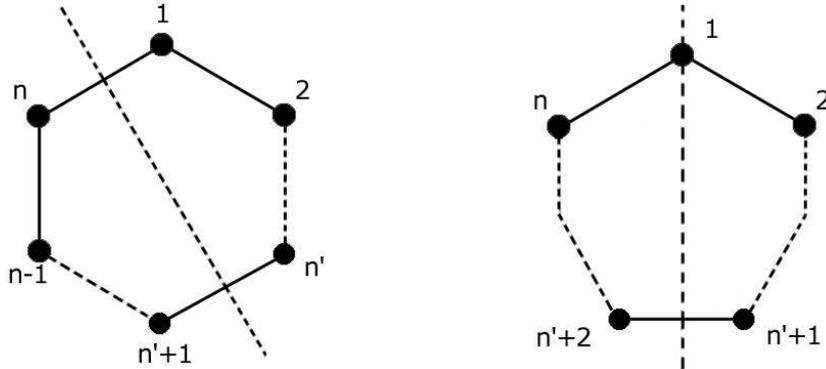


Figura 2: Simmetrie per riflessione di un poligono regolare con un numero di vertici pari (a sinistra) e dispari (a destra)

**Proposizione 2.5** *la rappresentazione  $g \rightarrow \hat{g}$  è fedele.*

**Dim.** Si supponga che  $\hat{g}_1 = \hat{g}_2$ , in modo che  $(\hat{g}_1(\omega))(x) = (\hat{g}_2(\omega))(x)$  e, di conseguenza,

$$\omega(g_1(x)) = \omega(g_2(x)) (\omega \in \Omega, x \in X).$$

L'equazione è vera per ogni  $\omega$ , in particolare per la colorazione che assegna un dato colore a  $g_1(x)$  ed un diverso colore ad ogni altro membro di  $X$ . In questo caso l'equazione implica che  $g_1(x) = g_2(x)$ . Dato che la stessa argomentazione vale per ogni  $x \in X$ , si conclude che  $g_1 = g_2$ .  $\square$

Quindi il gruppo immagine  $\hat{G}$  è isomorfo a  $G$ . Due colorazioni sono indistinguibili se ognuna può essere trasformata nell'altra attraverso una qualche permutazione  $\hat{g} \in \hat{G}$ , ovvero se appartengono alla stessa *orbita* nell'azione di  $\hat{G}$  su  $\Omega$ . Quindi il numero di colorazioni *distinguibili* (o *non-equivalenti*) è il numero di orbite nell'azione di  $\hat{G}$  su  $\Omega$ . Di seguito, viene riportato un risultato noto come lemma di Burnside o lemma di Cauchy–Frobenius, che lega il numero di orbite al numero di punti *fissati* in un'azione di gruppo.

**Lemma 2.6** *Sia  $G$  un gruppo che agisce su un insieme  $X$ . Si denoti con  $F(g) = \{x \in X | g(x) = x\}$  l'insieme dei punti in  $X$  fissati dall'elemento  $g \in G$ . Il numero  $t$  di orbite di  $G$  su  $X$  è pari al numero medio di punti fissati dagli elementi di  $G$ :*

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Utilizzando la proposizione 2.5 ed il lemma 2.6 è possibile dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 2.7** Se  $G$  è un gruppo di permutazioni di  $X$ , e  $\zeta_G(y_1, y_2, \dots, y_n)$  è il suo indice ciclo, allora il numero di colorazioni non equivalenti di  $X$ , quando ci sono  $r$  colori disponibili è

$$\zeta_G(r, r, \dots, r)$$

**Dim.** La rappresentazione  $g \rightarrow \hat{g}$  è una bijezione, quindi  $|G| = |\hat{G}|$ :

$$\frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\hat{g} \in \hat{G}} |F(\hat{g})| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(\hat{g})| \quad (3)$$

dove  $F(\hat{g})$  è l'insieme di colorazioni fissate da  $\hat{g}$ . Si supponga  $\omega$  una colorazione fissata da  $\hat{g}$ , tale che  $\hat{g}(\omega) = \omega$ , e sia  $(xyz \dots)$  un qualsiasi ciclo di  $g$ . Si ha

$$\omega(y) = \omega(g(x)) = (\hat{g}(\omega))(x) = \omega x$$

e quindi  $\omega$  assegna lo stesso colore a  $x$  ed a  $y$ . Ripetendo la stessa argomentazione, si può dimostrare che  $y$  e  $z$  hanno lo stesso colore, e così via. Quindi  $\omega$  è costante in ciascun ciclo di  $g$ . Se  $g$  ha in tutto  $k$  cicli, allora il numero di colorazioni che hanno questa proprietà è  $r^k$ , dato che un elemento di ogni ciclo può essere colorato arbitrariamente, ed i colori dei rimanenti, a quel punto, essere determinati. Quindi, supponendo che  $g$  abbia  $\alpha_i$  cicli di lunghezza  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), con  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ , e

$$|F(\hat{g})| = r^k = r^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = \zeta_g(r, r, \dots, r) \quad (4)$$

la dimostrazione si conclude sostituendo l'espressione (4) nella formula (3) per il calcolo del numero di orbite.  $\square$

Da questo teorema si deduce che il problema di trovare il numero di colorazioni non equivalenti quando sono disponibili  $r$  colori può essere ridotto al problema di calcolare l'indice ciclo del gruppo di permutazioni. Quando si conosce l'indice ciclo, è sufficiente sostituire  $r$  ad ognuno dei termini  $y_1, \dots, y_n$  per ottenere il risultato.

### 2.3 Insiemi di colorazioni e loro funzioni generatrici

E' possibile generalizzare il risultato precedente: oltre che calcolare il numero totale di colorazioni non equivalenti, è possibile distinguere il numero di esse in cui ogni colore è utilizzato singolarmente un certo numero di volte.

Si supponga che l'insieme  $X$  debba essere colorato, e che l'insieme dei colori disponibili sia  $K = \{a, b, \dots, h\}$ . Associato ad ogni colorazione  $\omega : X \rightarrow K$  c'è un'espressione formale, l'*indicatore* di  $\omega$ , definito come

$$\text{ind}(\omega) = a^{n_a} b^{n_b} \dots h^{n_h}$$

dove  $n_a, n_b, \dots, n_h$  sono il numero dei membri di  $X$  che ricevono rispettivamente i colori  $a, b, \dots, h$ . Quindi  $n_a + n_b + \dots + n_h = n$ , con  $n = |X|$ . Dato un qualsiasi sottoinsieme  $A$  dell'insieme  $\Omega$  di tutte le colorazioni, viene definita la funzione generatrice delle colorazioni  $U_A$  come la somma formale

$$U_A(a, b, \dots, h) = \sum_{\omega \in A} \text{ind}(\omega)$$

Quando i termini di  $U_A$  sono raccolti nella maniera usuale, il coefficiente del termine  $a^s b^t \dots$  è il numero di colorazioni in  $A$  nelle quali il colore  $a$  è utilizzato  $s$  volte, il colore  $b$  è utilizzato  $t$  volte e così via.

Si vuole, ora, ottenere una formula esplicita per una particolare funzione generatrice di questo tipo. Si supponga di avere una partizione  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$  in cui  $|X_i| = m_i (1 \leq i \leq k)$  e  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ .

**Teorema 2.8** *Sia  $X$  partizionato come descritto sopra, e sia  $B$  l'insieme delle colorazioni  $\omega : X \rightarrow \{a, b, \dots, h\}$  che assegnano lo stesso colore ad ogni membro di  $X_i$ . Allora*

$$U_B(a, b, \dots, h) = (a^{m_1} + b^{m_1} + \dots + h^{m_1}) \cdot (a^{m_2} + b^{m_2} + \dots + h^{m_2}) \cdot \dots \\ \dots \cdot (a^{m_k} + b^{m_k} + \dots + h^{m_k})$$

**Dim.** Si costruisce una corrispondenza bigettiva tra le colorazioni in  $B$  ed i termini ottenuti moltiplicando tra di loro i fattori al secondo membro:

- A ogni colorazione  $\omega \in B$  corrisponde uno dei termini ottenuti dal secondo membro: scelta  $\omega$ , si pone che  $\omega$  assegni il colore  $c_1$  a tutto  $X_1$ ,  $c_2$  a tutto  $X_2$  e così via; si pone in corrispondenza  $\omega$  con il prodotto dei termini

$$\begin{array}{ll} c_1^{m_1} & \text{dalla prima parentesi} \\ c_2^{m_2} & \text{dalla seconda parentesi} \\ \dots & \\ c_k^{m_k} & \text{dall'ultima parentesi} \end{array}$$

- Ad ogni scelta simile dei termini corrisponde una sola colorazione, che soddisfa le condizioni di appartenenza a  $B$ .

Inoltre, il prodotto dei termini posti in corrispondenza con ogni colorazione  $\omega$  è l'indicatore  $\text{ind}(\omega)$  (per definizione di  $\text{ind}(\omega)$ ); quindi, moltiplicando i termini al secondo membro si ottiene

$$(a^{m_1} + b^{m_1} + \dots + h^{m_1}) \cdot (a^{m_2} + b^{m_2} + \dots + h^{m_2}) \cdot \dots \\ \dots \cdot (a^{m_k} + b^{m_k} + \dots + h^{m_k}) = \sum_{\omega \in B} \text{ind}(\omega)$$

Ma  $U_B(a, b, \dots, h) = \sum_{\omega \in B} \text{ind}(\omega)$  per definizione di  $U_B$ .  $\square$

Quando si pone  $a = b = \dots = h = 1$  nella formula di  $U_B(a, b, \dots, h)$  ogni fattore del secondo membro si riduce a  $r$ , il numero di colori. Quindi, il numero totale di colorazioni in  $B$  è  $r^k$ , in accordo con il fatto che si deve assegnare uno di  $r$  colori a ciascuno dei  $k$  insiemi  $X_1, \dots, X_k$ .

## 2.4 Il teorema di Pólya

Si supponga che  $G$  sia un gruppo di permutazioni dell'insieme  $X$ , e che  $\hat{G}$  sia il gruppo di permutazioni indotto sull'insieme  $\Omega$  delle colorazioni di  $X$ , definito secondo la regola  $(\hat{g}(\omega))(x) = \omega(g(x))$ . Si vuole ottenere la funzione generatrice  $U_D(a, b, \dots, h)$ ,

dove  $D$  è l'insieme delle colorazioni non equivalenti, contenente un rappresentante per ciascuna orbita di  $\hat{G}$  su  $\Omega$ . Il coefficiente di  $a^s b^t \cdots$  in  $U_D$  rappresenta il numero di colorazioni indistinguibili nelle quali il colore  $a$  è utilizzato  $s$  volte, il colore  $b$  è utilizzato  $t$  volte e così via. Il teorema di Pólya afferma che  $U_D$  è ottenuta dall'indice ciclo di  $G$   $\zeta_G(y_1, \dots, y_n)$  sostituendo  $a^i + b^i + \cdots + h^i$  per  $y_i$ .

Nella dimostrazione del teorema di Pólya si ricorre ad una versione “pesata” del lemma di Burnside. (2.6):

**Lemma 2.9** *Si supponga che ad ogni elemento  $x \in X$  sia associato un “peso”  $w(x)$  e che elementi appartenenti alla stessa orbita nell'azione di  $G$  su  $X$  abbiano lo stesso peso. La somma  $T$  dei pesi dei rappresentanti di ogni orbita è*

$$T = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in F(g)} w(x)$$

**Teorema 2.10** *Sia  $\zeta_G(y_1, \dots, y_n)$  l'indice ciclo di un gruppo  $G$  di permutazioni di  $X$ ; sia  $D$  l'insieme di colorazioni contenente un rappresentante per ogni orbita di  $\hat{G}$  su  $\Omega$ . La funzione generatrice  $U_D(a, b, \dots, h)$  del numero di colorazioni non equivalenti di  $X$ , quando i colori disponibili sono  $a, b, \dots, h$ , è data da*

$$U_D(a, b, \dots, h) = \zeta_G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

dove  $\gamma_i = a^i + b^i + \cdots + h^i (1 \leq i \leq n)$ .

**Dim.** Innanzitutto, si vuole trovare una formula alternativa per  $U_D(a, b, \dots, h) = \sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega)$ . Applicando la versione pesata del lemma di Burnside (2.9) all'azione di  $\hat{G}$  su  $\Omega$ , si ottiene

$$\sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega) = \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\hat{g} \in \hat{G}} \left[ \sum_{\omega \in F(\hat{g})} \text{ind}(\omega) \right]$$

dove  $F(\hat{g})$ , come descritto nella sottosezione 2.2, è l'insieme delle colorazioni fissate da  $\hat{g} \in \hat{G}$ . La somma tra le parentesi è  $U_{F(\hat{g})}$ , per definizione, quindi

$$\sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega) = \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\hat{g} \in \hat{G}} U_{F(\hat{g})} \quad (5)$$

Inoltre, una colorazione  $\omega$  è in  $F(\hat{g})$  se e solo se è costante in ogni ciclo di  $g$ , come dimostrato per il teorema 2.7. Quindi la forma esplicita per  $U_{F(\hat{g})}$  è data dal teorema 2.8:

$$U_{F(\hat{g})}(a, b, \dots, h) = (a^{m_1} + b^{m_1} + \dots + h^{m_1}) \cdot (a^{m_2} + b^{m_2} + \dots + h^{m_2}) \cdot \dots \cdot (a^{m_k} + b^{m_k} + \dots + h^{m_k}) = \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_k}$$

dove  $m_1, m_2, \dots, m_k$  sono le lunghezze dei cicli di  $g$ . In modo equivalente, se  $g$  ha  $\alpha_i$  cicli di lunghezza  $i (1 \leq i \leq n)$ , allora

$$U_{F(\hat{g})}(a, b, \dots, h) = \gamma_1^{\alpha_1} \gamma_2^{\alpha_2} \cdots \gamma_n^{\alpha_n} = \zeta_g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

Dato che la rappresentazione  $g \rightarrow \hat{g}$  è una bijezione, si ha  $|G| = |\hat{G}|$ , e sostituendo nella formula (5) per  $U_{F(\hat{g})}$  si ottiene

$$U_D(a, b, \dots, h) = \zeta_G(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

□

### 3 Teorema di Pólya ed enumerazione di grafi

Nella sezione 1 è stato descritto, a titolo di esempio, l'utilizzo del teorema di Pólya per il calcolo del numero di configurazioni non equivalenti nelle quali può trovarsi un oggetto circolare simile ad una collana. In questa sezione vengono riportate alcune significative applicazioni del teorema a problemi di enumerazione di grafi.

#### 3.1 Enumerazione di strutture chimiche

Il teorema di Pólya ha trovato un'elegante applicazione nell'ambito del conteggio di composti chimici aventi particolari strutture. Di seguito viene proposto il calcolo del numero di isomeri per gli *alcani monosostituiti* e per la famiglia dei *benzeni*.

##### 3.1.1 Alcani monosostituiti

Nelle molecole degli alcani monosostituiti ci sono atomi di tre diversi elementi: atomi di carbonio (C), a valenza 4, atomi di idrogeno (H) a valenza 1 ed un atomo di un diverso elemento (X) a valenza 1. Ciascun atomo forma legami chimici con altri atomi. Non ci sono legami doppi o tripli. Una molecola può essere rappresentata come in figura 3: ogni atomo è rappresentato da un vertice del grafo ed ogni legame chimico da un lato. Il grado di ogni vertice è pari alla valenza dell'elemento rappresentato. Queste condizioni impongono che la formula chimica per ogni alcano monosostituito avente  $n$  atomi di carbonio sia  $C_n H_{2n+1} X$ . Si vuole determinare quanti siano i diversi alcani monosostituiti (isomeri) aventi  $n$  di atomi di carbonio, ovvero ottenere la funzione generatrice  $A(x)$  delle configurazioni per gli alcani monosostituiti.

Ogni permutazione ciclica dei siti (1), (2) e (3) rappresentati in figura 3 dà origine a molecole simmetriche. Questo tipo di permutazioni forma il gruppo ciclico  $C_3$ , che contiene le permutazioni (1)(2)(3), (123) e (132); l'indice ciclo di  $C_3$  è

$$\zeta_{C_3} = \frac{1}{3}(y_1^3 + 2y_3)$$

(si veda la sottosezione 2.1). In ognuno dei siti (1), (2) e (3) può essere costruita una molecola di alcano monosostituito, la cui funzione generatrice è stata indicata con  $A(x)$ . Sostituendo la funzione generatrice  $A(x)$  nell'indice ciclo si ottiene

$$\frac{1}{3}(A^3(x) + 2A(x^3)) \quad (6)$$

il coefficiente di  $x^n$  in questa espressione è il numero di configurazioni in cui  $n$  atomi di carbonio sono ripartiti tra le porzioni (1), (2) e (3) della molecola. Dato che anche

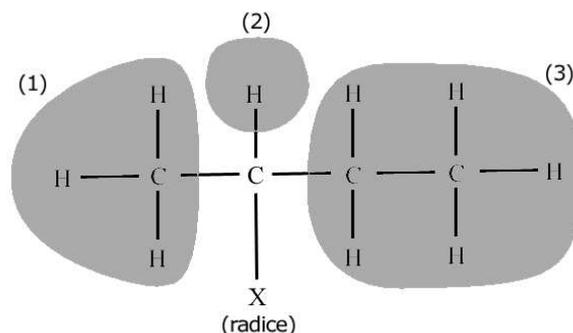


Figura 3: Struttura degli alcani monosostituiti

la radice contiene un atomo di carbonio, la formula (6) può essere moltiplicata per  $x$ , in modo che il coefficiente di  $x^n$  rappresenti il numero di configurazioni in cui  $n$  atomi di carbonio sono presenti nell'intera molecola (radice compresa). Nel procedimento descritto non si è tenuto conto del caso in cui  $n = 0$ , corrispondente alla molecola X-H. Infatti, nella funzione generatrice non sono presenti termini costanti. Per questo si aggiunge la costante 1 all'espressione (6), ottenendo la funzione generatrice per gli alcani monosostituiti:

$$A(x) = 1 + \frac{1}{3}x(A^3(x) + 2A(x^3)) \quad (7)$$

Anche se non sembra possibile ottenere un'espressione esplicita per  $A(x)$ , i suoi coefficienti possono essere calcolati utilizzando una procedura ricorsiva: conoscendo il numero di alcani monosostituiti contenenti al più  $k$  atomi di carbonio è possibile ricavare il numero di alcani monosostituiti formati da  $k + 1$  atomi di carbonio.

**Esempio** I primi 4 coefficienti di  $A(x)$  sono 1, 1, 1, 2, è semplice trovarli costruendo tutti gli alcani monosostituiti con 0, 1, 2 e 3 atomi di carbonio. La  $A(x)$  troncata al quarto termine è  $1 + x^1 + x^2 + 2x^3$ . Sostituendo nell'espressione (7) si ottiene

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3}x[A^3(x) + 2A(x^3)] &= \\ &= 1 + \frac{1}{3}x[1 + 3x + 6x^2 + 13x^3 + 18x^4 + 21x^5 + 25x^6 + 18x^7 + 12x^8 + 8x^9 + \\ &+ 2 + 2x^3 + 2x^6 + 4x^9] = \\ &= 1 + \frac{1}{3}x(3 + 3x + 6x^2 + 15x^3 + 18x^4 + 21x^5 + 27x^6 + 18x^7 + 12x^8 + 12x^9) = \\ &= x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 9x^7 + 6x^8 + 4x^9 + 4x^{10} \end{aligned}$$

Il numero di alcani monosostituiti contenenti 4 atomi di carbonio è 5, il coefficiente del termine  $x^4$  della funzione generatrice  $A(x)$ .

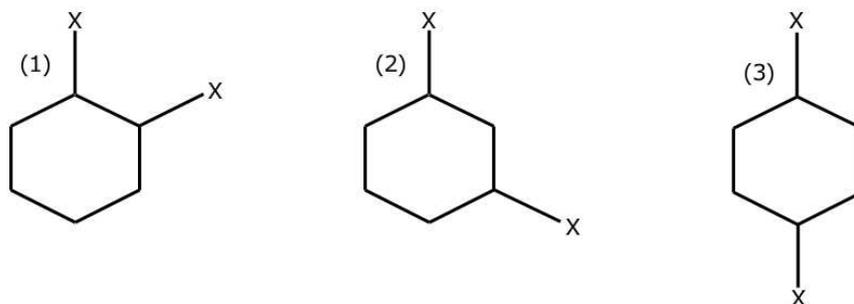


Figura 4: Struttura dei benzeni, gruppi orto- (1) meta- (2) e para- (3)

### 3.1.2 Benzeni

Un'altra applicazione del teorema di Pólya a problemi legati all'enumerazione di strutture chimiche è il conteggio di alcuni tipi di molecole di benzene. La molecola di un benzene può essere rappresentata con un esagono, ai cui vertici possono essere presenti atomi o strutture più complesse. Inoltre, è noto che ci sono tre modi, quelli riportati in figura 4, di completare la molecola del benzene.

Una molecola di benzene alchil-sostituito è una molecola nella quale, nei siti rappresentati con X, sono posizionati dei radicali di alchile. Un radicale di alchile può essere considerato come una molecola di alcano monosostituito alla quale è stata rimossa la radice. Il problema è analogo a quello della collana, discusso nella sezione 1: ci sono sei siti, che possono essere permutati, conducendo a figure equivalenti, dalle permutazioni del gruppo diedrale  $D_6$ , il cui indice ciclo è descritto dalla formula (1). Per descrivere il contenuto di ciascun sito, invece della funzione generatrice dei colori  $1 + x$  della sezione 1, si utilizza la funzione generatrice per gli alcani monosostituiti  $A(x)$ , ottenendo la funzione generatrice per il benzene alchil-sostituito:

$$B(x) = \frac{1}{12}(A^6(x) + 4A^3(x^2) + 3A^2(x)A^2(x^2) + 2A^2(x^3) + 2A(x^6))$$

Quindi, conoscendo i primi  $k$  termini di  $A(x)$  si possono calcolare i primi  $k$  termini di  $B(x)$ .

## 3.2 Enumerazione di grafi

In questa sottosezione vengono riportati alcuni risultati relativi al conteggio di alcune classi di grafi, ottenuti applicando il teorema di Pólya. Si considerino grafi *non etichettati* con  $n$  vertici. Un grafo si dice non etichettato quando i suoi vertici sono indistinguibili, a parte per il modo in cui sono interconnessi (al contrario dei grafi *etichettati*, nei quali ad ogni vertice è associata un'etichetta, che lo rende univocamente identificabile). Tra qualsiasi coppia di vertici può esserci o meno un lato. Le  $N = \frac{n(n-1)}{2}$  posizioni in cui possono essere presenti i lati sono i siti del problema. A ciascuno di questi siti può essere assegnato un colore bianco (lato non presente) o nero (lato presente).

### 3.2.1 Grafi non etichettati

Non essendo etichettati, i vertici del grafo possono essere permutati da qualsiasi elemento del gruppo simmetrico  $S_n$ . Ogni permutazione dei vertici induce una permutazione delle coppie di vertici, e quindi dei siti. Si denoti con  $S_n^{(2)}$  l'insieme delle permutazioni delle coppie di vertici. Per applicare il teorema di Pólya è necessario determinare l'indice ciclo di  $S_n^{(2)}$ .

Le permutazioni di vertici con lo stesso indice ciclo inducono permutazioni dei siti con lo stesso indice ciclo (ma non è vero il contrario). Quindi è possibile restringere la valutazione ad un solo esempio per ogni tipo di divisione in cicli delle permutazioni.

Si prenda, ad esempio, il caso  $n = 4$ . La prima permutazione tra vertici da considerare è l'identità, il cui tipo è  $y_1^4$ . Il tipo della corrispondente permutazione tra siti è  $y_1^6$ . Il secondo tipo di permutazione è quella che scambia due vertici, lasciando invariati gli altri. Il tipo di questa permutazione tra vertici è  $y_1^2 y_2$  ed il tipo della corrispondente permutazione tra siti è  $y_1^2 y_2^2$ . Ci sono 6 permutazioni di questo tipo. Si passa a considerare le permutazioni che muovono tre vertici, lasciando fisso il quarto. In questo caso, al tipo  $y_1 y_3$  per la permutazione tra vertici corrisponde il tipo  $y_3^2$  tra i siti (ci sono 8 permutazioni di questo tipo). E così via, considerando le permutazioni che scambiano i vertici a coppie e quelle che scambiano tra di loro tutti i 4 vertici.

**Proposizione 3.1** *Il numero di permutazioni in  $S_n$  con tipo  $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots$ , dove  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$  è*

$$\frac{n!}{1^{\alpha_1} \alpha_1! 2^{\alpha_2} \alpha_2! \dots n^{\alpha_n} \alpha_n!}$$

Per ottenere i tipi delle permutazioni tra siti corrispondenti alle permutazioni tra vertici, devono essere considerati separatamente tre casi:

1. coppie di vertici dello stesso ciclo
2. coppie di vertici di cicli diversi della stessa lunghezza
3. coppie di vertici di cicli di diversa lunghezza .

Nel caso 2, se la lunghezza del ciclo è  $h$ , ci sono  $\binom{h}{2}$  modi in cui i due cicli possono essere scelti. Nel caso 3, se i cicli hanno lunghezza  $h$  e  $k$ , allora ci sono  $\alpha_h \alpha_k$  scelte possibili. Inoltre, dato che applicando ripetutamente la permutazione, i vertici si muovono nei rispettivi cicli, il numero di passi impiegati per tornare nella posizione iniziale, completando il ciclo, è il minimo comune multiplo tra  $h$  e  $k$ .

**Proposizione 3.2** *Si denoti con  $[h, k]$  il minimo comune multiplo tra  $h$  e  $k$  e con  $(h, k)$  il loro massimo comun divisore. L'indice ciclo di  $S_n^{(2)}$  è*

$$\zeta_{S_n^{(2)}} = \frac{1}{n!} \sum_{(\alpha)} \left\{ \frac{n!}{\prod_i i^{\alpha_i} \alpha_i!} \prod_i y_{2i+1}^{i\alpha_{2i+1}} \cdot \prod_i (y_i y_{2i}^{i-1})^{\alpha_{2i}} y_i^{i \binom{\alpha_i}{2}} \cdot \prod_{h=1}^n \prod_{k=h+1}^n y_{[h,k]}^{(h,k)\alpha_h \alpha_k} \right\}$$

Sostituendo le  $y_i$  con la funzione  $1 + x^i$  si ottiene la funzione generatrice per il numero di grafi con  $n$  vertici, classificati per numero di lati. Nel caso interessi solo il numero di grafi con  $n$  vertici, senza distinzioni rispetto al numero di lati, è possibile porre  $x = 1$ . Questa operazione può essere fatta anche prima della sostituzione  $y_i = (1 + x^i)$ , semplicemente sostituendo  $y_i$  con 2.

### 3.2.2 Grafi connessi

Spesso è utile conoscere il numero di grafi connessi invece del numero totale dei grafi. C'è un forte legame tra il numero di grafi connessi ed il numero totale di grafi, dato che ogni grafo può essere visto come collezione di componenti connesse. Si supponga, quindi, di conoscere la funzione generatrice  $c(x) = c_1x + c_2x^2 + \dots$  in cui  $c_n$  è il numero di grafi connessi aventi  $n$  vertici. Ogni grafo  $G$  può essere specificato in modo unico elencando quante volte ogni grafo connesso occorre come componente di  $G$ . Il contributo al numero di vertici di  $G$  fornito da un particolare grafo connesso con  $n$  vertici che occorre  $r$  volte come componente di  $G$  è  $rn$ . I contributi possibili, per diversi valori di  $r$ , sono descritti dalla funzione generatrice  $1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots = (1 - x^n)^{-1}$ . Dato che ci sono  $c_n$  grafi connessi con  $n$  vertici e ciascuno contribuisce alla funzione generatrice  $g(x)$  con un fattore  $(1 - x^n)^{-1}$ , tutti insieme contribuiscono un fattore  $(1 - x^n)^{-c_n}$ . Considerando tutti i valori di  $n$  si ottiene

$$g(x) = \sum_n g_n x^n = \prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{-c_n}$$

Dato che i coefficienti  $g_n$  possono essere calcolati come descritto nella sottosezione 3.2.1. La formula può essere utilizzata al contrario, per calcolare i coefficienti di  $c_n$ , confrontando i coefficienti di  $x, x^2, x^3$  di  $c(x)$  e  $g(x)$ . In modo simile, ed utilizzando funzioni generatrici in due variabili, è possibile ottenere anche il numero di grafi connessi aventi un dato numero di archi [3].

### 3.2.3 Alberi ed alberi con radice

Un *albero* è un grafo connesso senza cicli. Un *albero con radice* è un albero in cui un vertice (la radice) è distinto dagli altri. Una *foresta con radice* è un grafo in cui ogni componente è un albero con radice. Se si rimuove la radice da un albero con radice, si ottiene una foresta (due sotto-alberi). Se si considerano radici dei due sotto-alberi i vertici che erano adiacenti alla radice dell'albero di partenza, si ottiene una foresta con radice. Da queste considerazioni si deduce che il numero di alberi con radice aventi  $n$  vertici è pari al numero di foreste con radice di  $n - 1$  vertici. Sia  $T(x) = T_1x + T_2x^2 + T_3x^3 + \dots$  la funzione generatrice per gli alberi con radice ( $T_n$  è il numero di alberi con radice di  $n$  vertici). Utilizzando lo stesso procedimento adottato nella sottosezione precedente, è possibile scrivere la funzione generatrice dei grafi in cui ogni componente è un albero con radice (ovvero la funzione generatrice per le foreste con radice):

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{-T_n}$$

Il numero di alberi con radice è il coefficiente del termine  $x^{n-1}$  in questa formula o, in modo equivalente, il coefficiente di  $x^n$  nella formula  $x \prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{-T_n}$ . Si ottiene così l'equazione

$$T_1 x + T_2 x^2 + T_3 x^3 + \dots = x(1-x)^{-T_1} (1-x^2)^{-T_2} (1-x^3)^{-T_3} \dots$$

Quindi, conoscendo i primi  $k$  termini  $T_1 \dots T_k$ , è possibile ottenere il termine  $T_{k+1}$ .

### 3.2.4 Altri tipi di grafo

Anche la funzione generatrice  $t(x)$  per gli alberi (senza radice) dipende da  $T(x)$ . Si dimostra, infatti, che

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2}[T^2(x) - T(x^2)]$$

questo risultato è noto come *formula di Otter*. Altri problemi che sono stati trattati utilizzando il teorema di Pólya includono l'enumerazione di grafi diretti e l'enumerazione di multigrafi, anche nel caso in cui il numero di lati tra due vertici sia limitato da un intero  $s$  (multigrafi di forza  $s$ ) [3].

## 3.3 Teorema di Pólya e teoria dei numeri

Si consideri la classe degli *alberi piani*. Un albero piano è un albero assieme ad una particolare disposizione dei lati nel piano. Un *isomorfismo tra alberi piani* è un isomorfismo tra grafi che preserva l'ordine della disposizione dei lati per ciascun vertice. Un *albero piantato* è un albero con radice nel quale la radice ha grado 1. Utilizzando il teorema di Pólya è possibile ottenere la funzione generatrice  $R(x)$  per gli alberi piani con radice utilizzando l'indice ciclo del gruppo ciclico e la funzione generatrice  $P(x)$  per gli alberi piantati con radice.

**Teorema 3.3** *Siano  $P(x)$ ,  $Q(x)$  ed  $R(x)$  le funzioni generatrici per alberi piani rispettivamente piantati, ordinari e con radice. Allora*

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n+1}$$

$$R(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{C_n} \left( \frac{P(x)}{x} \right)$$

$$Q(x) = R(x) - \frac{1}{2x^2} (P^2(x) - P(x^2))$$

E' da notare come i coefficienti  $P_n$  siano i numeri di Catalan

$$u_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

che rappresentano il numero di strutture combinatorie come i bilanciamenti corretti di parentesi in un'espressione e le triangolazioni di un poligono convesso. Inoltre, il seguente risultato è stato dimostrato utilizzando il teorema di Pólya:

**Teorema 3.4** Sia  $r(m)$  il numero di alberi piani con radice non etichettati non isomorfi, aventi  $m$  lati. Allora, per  $m > 1$

$$r(m) = \frac{1}{2m} \sum_{d|m} \phi(m/d) \binom{2d}{d}$$

Questo teorema lega, quindi, il numero di alberi piani con radice alla funzione  $\phi$  di Eulero.

La funzione  $\phi$  di Eulero, come visto nella sottosezione 2.1, compare anche nel calcolo dell'indice ciclo per il gruppo ciclico  $C_n$

$$\zeta_{C_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) y_d^{\frac{n}{d}}$$

Si nota come, sostituendo ad ogni  $y_i$  la costante 1, si ottenga la versione classica della formula di Eulero:

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) = 1.$$

## Appendice

Vengono riportate, di seguito, le definizioni relative ad alcuni concetti menzionati nella relazione.

**Definizione** Un *gruppo di permutazioni* è un gruppo finito  $G$  i cui elementi sono le permutazioni di un dato insieme, e la cui operazione è la composizione di permutazioni. Esempi di gruppi di permutazioni sono il gruppo ciclico  $C_n$  (di ordine  $n$ ), il gruppo diedrale  $D_n$  (di ordine  $2n$ ) e il gruppo simmetrico  $S_n$  (di ordine  $n!$ ).

**Definizione** Un *gruppo ciclico*  $C_n$  di un gruppo  $G$  di ordine  $n$  è un gruppo definito dall'elemento  $g \in G$  (il *generatore* del gruppo) e dalle sue  $n$  potenze fino a  $g^n = I$ , dove  $I$  è l'elemento identità. I gruppi ciclici sono abeliani. C'è un unico gruppo ciclico, a meno di isomorfismi, di ordine  $n$  per ogni  $n \geq 2$ .

**Definizione** Il *gruppo diedrale*  $D_n$  di ordine  $2n$  è il gruppo di simmetrie di un poligono regolare con  $n$  lati. I gruppi diedrali sono gruppi di permutazioni non abeliani per  $n > 2$ .

**Definizione** Il *gruppo simmetrico*  $S_n$  di ordine  $n!$  è il gruppo di tutte le permutazioni di  $n$  simboli.  $S_n$  contiene come sottogruppo ogni gruppo di ordine  $n$ .

**Definizione** Si dice che un gruppo  $G$  *agisce* su uno spazio  $X$  quando c'è un mapping  $\varphi : G \times X \rightarrow X$  tale che le seguenti condizioni valgono per ogni  $x \in X$ .

1.  $\varphi(I, x) = x$ , dove  $I$  è l'elemento identità di  $G$ .
2.  $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$ , per ogni  $g, h \in G$ .

In questo caso,  $\varphi$  è detta l'*azione di gruppo*. In un'azione di gruppo, un gruppo  $G$  permuta gli elementi di  $X$ . L'identità non compie nessuna azione, mentre la composizione di azioni corrisponde all'azione della composizione. Per un dato  $x \in X$ , l'insieme  $\{gx\}$  nel quale l'azione di gruppo muove  $x$  è detta l'*orbita di gruppo* di  $x$ . L'insieme dei punti di  $X$  fissati dall'azione di gruppo  $G$ , definito come

$$\{x \mid gx = x \ \forall g \in G\}$$

è detto insieme dei punti fissi del gruppo.

**Definizione** Una *rappresentazione*  $\rho$  di un gruppo  $G$  è un omomorfismo dal gruppo  $G$  al gruppo di permutazioni di un insieme  $X$ . Una rappresentazione si dice *fedele* se  $\rho$  è una funzione iniettiva da  $G$  al gruppo delle permutazioni di  $X$  (il gruppo simmetrico  $S_X$ ). In questo caso,  $G$  può essere identificato come un sottogruppo del gruppo di permutazioni di  $X$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] Biggs, NL: Symmetry and counting, in *Discrete mathematics*, Oxford University Press (1985) Oxford
- [2] Cook, R: Number Theory, in *Graph connections*, Beineke LW e Wilson RJ Eds, Oxford University Press (1997) New York
- [3] Read, RC: Enumeration, in *Graph connections*, Beineke LW e Wilson RJ Eds, Oxford University Press (1997) New York